

# 离散数学

## 第二章: 一阶逻辑

卢杨

厦门大学信息学院计算机科学与技术系

[luyang@xmu.edu.cn](mailto:luyang@xmu.edu.cn)



# 命题逻辑的局限性

- 在命题逻辑中，简单命题作为基本研究单位，对它不再进行分解。不考虑命题之间的内在联系，只考虑一个命题的真假。这样就忽略了命题丰富的内涵。
- 有时甚至无法判断一些简单而又常见的推理。例如典型的苏格拉底三段论：  
例  $p$ : 凡人都是要死的。  
 $q$ : 苏格拉底是人。  
 $r$ : 苏格拉底是要死的。
- $p \wedge q \rightarrow r$  表示这个推理。直观上看，推理正确， $r$  是前提  $p$  和  $q$  的有效结论。但推理的形式结构不是重言式，这反映了命题逻辑的局限性。



# 命题逻辑的局限性

- 原因是只将 $p, q, r$ 看成独立的命题, 不考虑其内在联系. 不能对简单命题自身的**内部特征**作进一步的分析, **无法揭示前提和结论在形式结构方面的联系**, 因此就不可能认识到这种推理的形式和规律, 这就使得命题逻辑的适用面比较狭窄.

例  $p$ : 熊猫是动物.

$q$ : 长颈鹿是动物.

- 它们是两个简单命题, 只能用两个不同的符号来表示, 但**这样的符号不能揭示这两个命题的共性**. 实际上, 它们之间是有联系的.
- 因此, 对简单命题的**成分, 结构**和简单命题间的**共同特性**等作进一步的分析, 分析出其中的个体词, 谓词, 量词, 再研究它们之间的关系, 总结出正确的推理形式和规则, 这就是一阶逻辑 (又称**谓词逻辑**或**一阶谓词逻辑**) 所要研究的内容.



## 2.1 一阶逻辑的基本概念

# 个体词与谓词

- 在一阶逻辑中, 简单命题被分解为**个体词** (主语) 与**谓词** (谓语) 两部分.

例 (1) 2是素数.

(2) 你是个好人.

(3) 易烱千玺比王俊凯帅.

- **个体词**是指可以独立存在的客体, 它可以是一个**具体的事物**, 或是一个**抽象的概念**.

例 上例中的2, 你, 易烱千玺, 王俊凯, 以及计算机, 熊猫, 围棋, 自然数, 定理, 思想, 爱情等都可以充当个体词.

- **谓词**是用来**刻画个体词的性质及个体词之间的关系**的词.

例 上例中的“…是素数”, “…是个好人”, “…比…帅”都是谓词, 前两个谓词表示事物的性质, 后一个谓词表示事物之间的关系.



# 个体词与个体域

- 表示具体的, 特指的个体词, 称为**个体常项**, 常用小写字母 $a, b, c, \dots$ 来表示.

例 地球, 科比, 美国队长, 那个漂亮的小姐姐.

- 表示抽象的, 泛指, 或在一定范围内变化的个体词, 称为**个体变项**, 常用小写字母 $x, y, z, \dots$ 来表示.

例 教科书, 自然数, 人, 漂亮的小姐姐.

- 称个体变项的取值范围为**个体域或论域**.

- 个体域可以是有穷集合 ( $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  或  $\{a, b, c, \dots, x, z, y\}$ ) 或无穷集合 (自然数集合, 实数集合, 整数集合).
- 最大的个体域是包含宇宙全体事物的个体域, 称为**全总个体域**.
- 若无特别声明时, 个体域均指**全总个体域**.

# 谓词

- 称表示有具体性质或关系的谓词, 称为**谓词常项**. 表示抽象的或泛指谓词称为**谓词变项**.
- 谓词都用 $F, G, H, \dots$ 表示, 根据上下文的具体情况确定是谓词变项还是常项.
  - 个体常项 $a$ 或变项 $x$ 具有性质 $F$ , 记作 $F(a)$ 或 $F(x)$ .
  - 个体常项 $a$ 与 $b$ , 变项 $x$ 与 $y$ , 或 $a$ 与 $x$ 具有关系 $G$ , 记作 $G(a, b), G(x, y)$ 或 $G(a, x)$ .

**例** 当 $F$ 的含义未指定时,  $F$ 是谓词变项. 当 $F$ 表示“...是素数”时,  $F$ 是谓词常项.

当 $a$ 表示2时,  $F(a)$ 表示“2是素数”.

当 $F$ 的含义不变时,  $F(x)$ 表示“ $x$ 是素数”.

$F(a)$ 是命题;  $F(x)$ 不是命题, 是命题变元, 因为 $x$ 是个体变项.

# 谓词

- 谓词中包含个体的数目称为谓词的元数.
- 含 $n(n \geq 1)$ 个个体的谓词称为 $n$ 元谓词.
  - 1元谓词是描述个体性质的;
  - $n(n \geq 2)$ 元谓词刻画个体之间关系的.
- 用 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 抽象地表示 $n(n \geq 1)$ 元谓词, 它是以个体域为定义域, 以 $\{0,1\}$ 为值域的 $n$ 元函数, 它不是命题.
  - 想要使其成为命题, 必须指定 $P$ 的含义使其成为谓词常项, 并且用个体常项 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 取代 $x_1, x_2, \dots, x_n$ .





# 谓词

- 将不带个体变项的谓词称为**0元谓词**. 命题逻辑中的命题常项与变项都可用0元谓词表示, 因而可把命题看作是谓词的特殊情况.
- 例如 $L(a, b)$ 为0元谓词. 当 $L$ 仍为谓词变项时, 它仍为命题变项. 一旦 $L$ 的意义明确后, 它就变成命题了.
- 命题逻辑中的连结词, 等值式, 推理定律等**均可在一阶逻辑中使用**, 只是要注意一阶逻辑的特殊性就是了.

# 谓词

例2.1 将下列命题在一阶逻辑中用0元谓词符号化, 并确定它们的真值:

- (1) 4是偶素数.
- (2) 如果3大于2, 则3大于4.
- (3) 若4大于3且3大于2, 则4大于2.

解

(1)  $F(x)$ :  $x$ 是偶数,  $G(x)$ :  $x$ 是素数,  $a: 4$ . 命题符号化为:  $F(a) \wedge G(a)$ .

因为 $G(a)$ 为假, 所以命题的真值为假.

(2)  $F(x, y)$ :  $x > y$ ,  $a: 3$ ,  $b: 2$ ,  $c: 4$ . 命题符号化为:  $F(a, b) \rightarrow F(a, c)$ .

因为 $F(a, b)$ 为真,  $F(a, c)$ 为假, 所以命题的真值为假.

(3)  $F(x, y)$ :  $x > y$ ,  $a: 4$ ,  $b: 3$ ,  $c: 2$ . 命题符号化为:  $F(a, b) \wedge F(b, c) \rightarrow F(a, c)$ .

3个0元谓词均为真, 所以命题的真值为真.



# 量词

- 在命题中分析出个体和谓词后, 仍不足以表达日常生活中各种问题的逻辑衔接.
- 现在考虑如下形式的命题在一阶逻辑中符号化的问题:
  - (1) **所有的**活人都呼吸.
  - (2) **有的**人吸烟.
- 在以上两个命题中, 除了有个体词和谓词外, 还有**表示数量的词** (所有的, 有的).
- 问题在于“所有的”和“有些”这种量词还没有分析出来, 因此必须在命题中引入量词.

# 量词

量词分为两种:

- (1) **全称量词“ $\forall$ ”**: 对应常用语言中的“所有”, “任意”, “一切”, “每一个”等.  $\forall x$ 表示对个体域中的**所有**个体,  $x$ 称为**全称性变项**,  $\forall xF(x)$ 表示个体域里所有个体都有性质  $F$ . ( $\forall$ : All里的A上下颠倒, 读作“任意”)
  - (2) **存在量词“ $\exists$ ”**: 对应常用语言中的“存在着”, “有一个”, “有些”, “至少存在一个”等.  $\exists x$ 表示**存在**个体域中的个体,  $x$ 称为**存在性变项**,  $\exists xF(x)$ 表示存在着个体域中的个体具有性质  $F$ . ( $\exists$ : Exist里的E左右颠倒, 读作“存在”)
- 量词也可看作是对个体词所**附加约束**的词.
  - 量词也可用于区别个体常项与个体变项. **只有个体变项才可以冠以量词.**
- 例** 可以说“所有人...”, “存在一个人...”, 但是不能说“所有科比...”, “存在一个科比...”.



# 量词

- 由于**量词涉及范围**，所以与个体域密切相关。使用量词将命题符号化后**真值与所用个体域有关**。
- 考虑前面两个命题的符号化问题。首先考虑当个体域为活人类集合 $D$ 。
  - (1)符号化为:  $\forall xF(x)$ , 其中 $F(x)$ :  $x$ 要呼吸. 命题为真.
  - (2)符号化为:  $\exists xG(x)$ , 其中 $G(x)$ :  $x$ 吸烟. 命题为真.
- 本个体域只有人而无其他事物，以上两个命题均讨论人的性质，所以命题符号化形式很简单。

- 现将个体域改为全总个体域 $D'$ .
  - 若将(1)仍符号化为:  $\forall xF(x)$ 的形式, 其涵义变成了“宇宙间的一切事物都要呼吸”, **变成了假命题**.
  - 若将(2)仍符号化为:  $\exists xG(x)$ 的形式, 表示“宇宙间有的事物吸烟”, 也没有表达有的人吸烟, 只是表达有的东西吸烟, 是“有的人吸烟”的必要非充分条件. **虽然还是真命题, 但这与原命题想表达的意思不一样了**.
- 在个体域 $D'$ 中要想将(1), (2)正确符号化并表达与在 $D$ 中相同的含义, 必须将与个体域相关的个体 (“人”) **从中分离**出来. 这就需要**引入新的谓词**, 称这样的谓词为**特性谓词**, 用于对个体变化的真正取值范围加以限制.

# 量词

- 此例中, 特性谓词为 $M(x)$ :  $x$ 是活人.
- 让(1)与(2)在个体域为 $D'$ 中的涵义与 $D$ 相同, 可作如下叙述:
  - (1) 对宇宙间的一切事物, 如果它是活人, 则它要呼吸.
    - 应符号化为 $\forall x(M(x) \rightarrow F(x))$ , 仍为真命题. 对全称量词后的特性谓词应**作为蕴涵式的前件**.
    - 若此处使用合取, 就会将各种个体不加区分地混为一体, 从而得出不正确的含义.  $\forall x(M(x) \wedge F(x))$ 变为“宇宙间的一切事物都是活人且要呼吸”.
  - (2) 在宇宙间存在会吸烟的人.
    - 应符号化为 $\exists x(M(x) \wedge G(x))$ , 仍为真命题. 对存在量词后的特性谓词应**作为合取式的一项**.
    - 若此处使用蕴涵, 意思也发生了扭曲.  $\exists x(M(x) \rightarrow F(x))$ 变为“宇宙间存在某个东西, 如果它是活人, 则它会抽烟”. 这个命题当所有活人都不抽烟的时候也为真, 因为宇宙间总有不是人的东西, 使得 $M(x)$ 为假.

记住, 这是固定搭配



# 量词

- 当给定个体域时，需要比较命题中**个体变项与个体域的包含关系**。当个体变项是个体域的**真子集**时，才需要**引入特性谓词**。
  - 也就是说，只有个体域的范围比个体变项的范围更大时，才需要特性谓词。
- 在上例中，仅当取个体域为全总个体域时，才需要引入特性谓词。若个体域为“黄种活人集合”，则无需引入特性谓词。因为个体变项(人)不是个体域(黄种活人)的真子集。





# 量词

**例 2.2** 在一阶逻辑中将下列命题符号化: (1) 自然数皆为整数. (2) 有的自然数是负数.

要求: (I) 个体域为自然数集合 $\mathbf{N}$ ; (II) 个体域为实数集合 $\mathbf{R}$ .

**解** (I) (1), (2)均讨论 $\mathbf{N}$ 中全体元素的性质, 因而不用引入特性谓词.

(1)  $\forall xF(x)$ , 其中 $F(x)$ :  $x$ 为整数. 是真命题.

(2)  $\exists xG(x)$ , 其中 $G(x)$ :  $x$ 为负数. 是假命题.

(II) (1), (2)均讨论 $\mathbf{R}$ 的真子集 $\mathbf{N}$ 中全体元素的性质, 因而需要引入特性谓词:  $N(x)$ :  $x$ 为自然数.

(1)  $\forall x(N(x) \rightarrow F(x))$ , 其中 $F(x)$ :  $x$ 为整数. 是真命题.

(2)  $\exists x(N(x) \wedge G(x))$ , 其中 $G(x)$ :  $x$ 为负数. 是假命题.



# 量词

在一阶逻辑中,使用量词时应注意下列要点:

- (1) 在不同的个体域中,命题符号化的**形式可能不同**,命题的**真值也可能会改变**.
- (2) 如果个体域未做声明,**一律使用全总个体域**.
- (3) 多个量词同时出现时,**不能随意颠倒它们的顺序**,否则会改变原命题的含义.
- (4) 在引入特性谓词后,全称量词后特性谓词为蕴涵式,存在量词后的特性谓词应作为合取式.**(固定搭配)**
- (5)  $n$ 元谓词由于包含个体变项,并不是命题.当个体域和谓词的涵义确定后, $n$ 元谓词要转化为命题**至少需要 $n$ 个量词**.

## 量词

**例** 取个体域 $D$ 为实数集合, 将该命题符号化: 对于任意的 $x$ , 都存在 $y$ , 使得 $x + y = 5$ .

**解** 设 $H(x, y): x + y = 5$ , 则该命题可符号为

$$\forall x \exists y H(x, y)$$

这是一个真命题. 但若颠倒了量词的次序, 得到

$$\exists y \forall x H(x, y)$$

此时公式的含义为: 存在 $y$ , 对于所有的 $x$ , 都有 $x + y = 5$ . 这显然是个假命题. 因此不能随便颠倒量词的次序, 以免改变命题的含义.



# 量词

例 在一阶逻辑中将下列命题符号化:

- (1) 上离散数学的人未必都不会挂科.
- (2) 并非一切劳动都存在能够代替的机器.

解 (1) 设 $F(x)$ :  $x$ 是上离散数学的人,  $G(x)$ :  $x$ 的离散数学挂了. 命题表示为:

$$\neg \forall x (F(x) \rightarrow \neg G(x)) \text{ 或 } \exists x (F(x) \wedge G(x))$$

(2) 设 $F(x)$ :  $x$ 是一种劳动,  $G(x)$ :  $x$ 是一种机器,  $H(x, y)$ :  $x$ 能够代替 $y$ . 命题表示为:

$$\neg \forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(y, x)))$$



# 量词

- 在引入个体词, 谓词和量词后, **数学上的所有概念和定理都可以表示为一阶逻辑的命题**, 因而可以用数理逻辑中的方法来研究数学的内容.

**例**取个体域 $D$ 为实数集合, 将数学分析中函数 $f(x)$ 在点 $a$ 连续的定义用一阶逻辑符号化:

对任意的 $\epsilon > 0$ , 存在一个 $\delta > 0$ , 使得对所有 $x$ , 若 $|x - a| < \delta$ , 则 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ .

**解**设 $g(x): |x|$ ,  $h(x, y): x - y$ ,  $G(x, y): x > y$ . 该定义作为命题表示为:

$$\forall \epsilon \left( G(\epsilon, 0) \rightarrow \exists \delta \left( G(\delta, 0) \wedge \forall x \left( \left( G(\delta, g(h(x, a))) \right) \rightarrow G(\epsilon, g(h(f(x), f(a)))) \right) \right) \right).$$



# 量词

- 有了谓词的概念和符号表示，就可以**更深刻地刻划**事物的属性以及它们之间的关系。
- 一阶逻辑是命题逻辑的推广，命题逻辑是一阶逻辑的特殊情形。从而命题逻辑的很多概念和规则，都可推广到一阶逻辑中沿用。
- 然而，在一阶逻辑中出现了**个体变项**，**谓词和量词**等新概念，给我们的讨论带来复杂性，尤其是**个体域常是无限的**，这加大了处理难度。

- 一个简单又深刻的例子是：命题逻辑里，一个公式**不难判断**它是否是重言式，因为总可以用真值表进行判断。但在一阶逻辑里，就**没有一般的能行算法**，来判断任一公式是否普遍有效（或重言）。
- 1936年Turing证明了：当个体域 $D$ 是无限集时，对于一阶逻辑，**判定公式的重言性和矛盾性是不可解的**。
- 困难就在于 $D$ 是无限集以及对谓词设定的**任意性**。然而，并不排除谓词公式有子类（如命题逻辑）是可判定的。

在一阶逻辑中将下列命题符号化:

- (1) 有些高中生比某些大学生还厉害.
- (2) 没有哪个高中生比所有的大学生都厉害.





# 课堂练习

在一阶逻辑中将下列命题符号化:

(1) 有些高中生比某些大学生还厉害.

解  $F(x)$ :  $x$ 是高中生;  $G(x)$ :  $x$ 是大学生;  $H(x, y)$ :  $x$ 比 $y$ 厉害. 符号化为:

$$\exists x \left( F(x) \wedge \exists y (G(y) \wedge H(x, y)) \right)$$

(2) 没有哪个高中生比所有的大学生都厉害.

解  $F(x)$ :  $x$ 是高中生;  $G(x)$ :  $x$ 是大学生;  $H(x, y)$ :  $x$ 比 $y$ 厉害. 符号化为:

$$\neg \exists x \left( F(x) \wedge \forall y (G(y) \rightarrow H(x, y)) \right)$$



## 2.2 一阶逻辑公式及解释

# 一阶逻辑公式

为使符号化更为准确和规范地进行谓词演算和推理, 在本节给出一阶逻辑合式公式的概念. 为此先给出一阶逻辑部分所用的字母表.

**定义** 字母表定义如下:

- (1) 个体常项:  $a, b, c, \dots, a_i, b_i, c_i, \dots, i \geq 1$ ;
- (2) 个体变项:  $x, y, z, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, i \geq 1$ ;
- (3) 函数符号:  $f, g, h, \dots, f_i, g_i, h_i, \dots, i \geq 1$ ;
- (4) 谓词符号:  $F, G, H, \dots, F_i, G_i, H_i, \dots, i \geq 1$ ;
- (5) 量词符号:  $\forall, \exists$ ;
- (6) 联结词符号:  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ;
- (7) 括号与逗号:  $(, ), ,$



# 一阶逻辑公式

## 定义 2.1 项的递归定义

- (1) 个体常项和变项是项.
- (2) 若  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是任意的  $n$  元函数,  $t_1, t_2, \dots, t_n$  是任意的  $n$  个项, 则  $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$  是项.
- (3) 只有有限次地应用(1), (2)形成的符号串才是项.

- 根据定义, 常项, 变项以及由它们生成的各种函数及复合函数都叫做项.
- 项可以看作是**广义的个体** (包括个体本身和个体通过函数的衍生).

**例**  $a, b, x, y, z, f(x, y) = xy, g(x, y) = x^2 + y^2, h(x, y) = 2x - y$  都是项.

$f(x, g(x, y)) = x(x^2 + y^2), g(f(x, y), h(x, y)) = x^2y^2 + (2x - y)^2$  等也都是项.



# 一阶逻辑公式

## 定义

设 $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是任意的 $n$ 元谓词,  $t_1, t_2, \dots, t_n$ 是任意的 $n$ 个项, 则称 $R(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 是原子公式.

- 1元谓词 $F(x), G(y)$ , 2元谓词 $H(x, y)$ 等都是原子公式. 有了原子公式就能定义合式公式了.

## 定义

合式公式也称谓词公式, 简称公式, 其递归定义如下:

- (1) 原子公式是合式公式.
- (2) 若 $A$ 是合式公式, 则 $(\neg A)$ 也是合式公式.
- (3) 若 $A, B$ 是合式公式, 则 $(A \vee B), (A \wedge B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式.
- (4) 若 $A$ 是合式公式, 则 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 也是合式公式.
- (5) 只有有限次地应用(1)-(4)形成的符号串才是合式公式.

- 谓词公式和命题公式的区别在于量词.

## 定义 2.2

在公式 $\forall xA(x)$ 和 $\exists xA(x)$ 中,称 $x$ 为**指导变项**, $A$ 为相应量词的**辖域**.在 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域中, $x$ 的所有出现都称为**约束出现**, $A$ 中不是约束出现的其它变项均称为是**自由出现的**.约束出现的个体变项简称为**约束变项**,自由出现的个体变项简称为**自由变项**.

- 若量词后有括号,在**括号内的公式**即为此量词的辖域.
- 若量词后无括号,则**量词后最短的公式**为此量词的辖域.

# 辖域

例 2.6 指出下列各公式中, 各量词的辖域以及个体变项的自由出现与约束出现.

(1)  $\forall x(F(x, y, z) \rightarrow \exists yG(x, y))$ .

(2)  $\exists xF(x, y) \wedge G(x, y)$ .

(3)  $\forall x\forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$ .

解

(1)  $\forall x$ 的辖域是 $(F(x, y, z) \rightarrow \exists yG(x, y))$ ,  $\exists y$ 的辖域是 $G(x, y)$ .  $x$ 约束出现两次,  $y$ 约束出现一次, 自由出现一次,  $z$ 自由出现一次.

(2)  $\exists x$ 的辖域是 $F(x, y)$ .  $x$ 约束出现一次, 自由出现一次,  $y$ 自由出现两次.

(3) 当多个量词连续出现, 后面的量词在前面量词的辖域之中.  $\forall x$ 的辖域是 $\forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$ ,  $\forall y$ 的辖域是 $(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y))$ .  $x$ 与 $y$ 都是约束出现的, 均各两次.



# 课堂练习

指出下列各公式中, 各量词的辖域以及个体变项的自由出现与约束出现.

$$(1) \forall y(F(x, y) \rightarrow \exists zG(y, z))$$

$$(2) \forall xF(x) \rightarrow \forall zG(x, y, z) \wedge F(z)$$





## 课堂练习

指出下列各公式中, 各量词的辖域以及个体变项的自由出现与约束出现.

$$(1) \forall y(F(x, y) \rightarrow \exists zG(y, z))$$

**解**  $\forall y$ 的辖域是 $(F(x, y) \rightarrow \exists zG(y, z))$ ,  $\exists z$ 的辖域是 $G(y, z)$ .  $x$ 自由出现一次,  $y$ 约束出现两次,  $z$ 约束出现一次.

$$(2) \forall xF(x) \rightarrow \forall zG(x, y, z) \wedge F(z)$$

**解**  $\forall x$ 的辖域是 $F(x)$ ,  $\forall z$ 的辖域是 $G(x, y, z)$ .  $x$ 约束出现一次, 自由出现一次,  $y$ 自由出现一次,  $z$ 约束出现一次, 自由出现一次.



# 闭式

## 定义

设 $A$ 为任意一公式, 若 $A$ 中**无自由变项**, 则称 $A$ 是**封闭的公式**, 简称**闭式**.

- 闭式与自由变项的关系, 有些类似于0元谓词与个体变项.
  - 闭式针对公式, 通过量词, 将自由变项变为约束变项;
  - 0元谓词针对谓词, 通过赋值, 将个体变项变为个体常项.
- 要想使含 $n(n \geq 1)$ 个自由变项的公式变成闭式, 则至少要加 $n$ 个量词. 然而有 $n$ 个量词不代表就一定是闭式.



# 闭式

## 例

- $\forall x \forall y (F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x, y)), \exists x \exists y L(x, y)$  都是闭式.
- $F(x) \rightarrow \forall y (G(y) \rightarrow H(x, y)), F(x) \wedge G(x)$  都不是闭式.
- 要使  $(F(x) \rightarrow G(x, y) \wedge L(x, y, z))$  成为闭式, 需要3个量词, 例如  $\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge \forall z L(x, y, z)))$ .
- 然而  $\forall x (F(x, y) \rightarrow \exists y (G(x, y) \wedge \forall z L(x, y, z)))$  虽然有3个量词, 但是却不是闭式, 因为  $y$  自由出现了一次.



# 解释

一般情况下, 一个一阶逻辑公式中含有个体常项, 变项 (自由出现的或约束出现的), 函数的常项, 变项, 谓词的常项, 变项等. **若对个体常项, 函数变项, 以及谓词变项赋予特殊的含义, 就构成公式的一个解释**, 有时使其成为命题, 有确定的真值.

## 定义 2.3

谓词公式 $A$ 的每一个**解释** $I$ 由下面4部分组成:

- (a) 给定个体域 $D_I$ ;
- (b) 对涉及的每一个个体常项赋给 $D_I$ 中的一个元素;
- (c) 给涉及的每一个函数符号指定 $D_I$ 上的一个具体的函数;
- (d) 给涉及的每一个谓词符号指定 $D_I$ 上的一个具体的谓词.

设把公式 $A$ 中所有个体常项, 函数符号和谓词符号替换成 $I$ 中规定的对象后得到 $A'$ , 称 $A'$ 为 $A$ 在解释 $I$ 下的**结果**, 或称在解释 $I$ 下 $A$ **被解释成** $A'$ .

- **解释不包含个体变项**, 因为个体变项可以通过量词进行限制.



# 解释

例 2.7 现有个体常项 $a$ , 函数变项 $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$ , 以及谓词变项 $E(x, y)$ . 给定解释 $I$ 如下:

(a) 个体域为自然数集;

(b)  $a = 0$ ;

(c)  $f(x, y) = x + y$ ,  $g(x, y) = x \cdot y$ ;

(d)  $E(x, y): x = y$ .

写出下列公式在解释 $I$ 下的结果并确定其真值:

(1)  $\forall x E(f(x, a), g(x, a))$ ;      (2)  $\forall x \forall y E(f(x, y), f(y, x))$ ;      (3)  $\exists x E(f(x, y), g(x, y))$

解

(1)  $\forall x(x + 0 = x \cdot 0)$ , 这是假命题.

(2)  $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ , 这是真命题, 描述的是加法交换律.

(3)  $\exists x(x + y = x \cdot y)$ ,  $y$ 在式中自由出现, 不是命题, 真值与 $y$ 的取值有关.

当 $y = 0$ 时, 结果为 $\exists x(x = 0)$ , 真值为真;

当 $y = 1$ 时, 结果为 $\exists x(x + 1 = x)$ , 真值为假.



# 解释

例  $\forall x \forall y (F(x) \wedge F(y) \wedge G(x, y) \rightarrow H(f(x, y), g(x, y)))$  是一个一阶逻辑中的公式, 没有什么意义. 但当我们给这个符号串一个解释, 使它就具有唯一的真值, 变成一个命题了.

解释1:

个体域  $D$ : 全总个体域;

谓词变项:  $F(x)$ :  $x$  是实数;  $G(x, y)$ :  $x \neq y$ ;  $H(x, y)$ :  $x > y$ ;

函数变项:  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ;  $g(x, y) = 2xy$ .

在该解释下, 本公式涵义为: 对于任意的实数  $x, y$ , 并且  $x \neq y$ , 则  $x^2 + y^2 > 2xy$ . 这是真命题.

解释2:

只将  $H(x, y)$  改为  $x < y$ , 其他情况同解释1, 则得到的命题为假命题.



# 解释

- **解释不代表消去所有变项**，因此有的公式在具体的解释中真值确定，即变成了命题，有的公式在某些解释中真值仍然不能确定，**仍不是命题**。
- **闭式在任何解释中都成为命题**。闭式中每个个体变项都受量词的约束，因而在具体解释中总表达一个意义确定的语句，即真命题或假命题。
- 不是闭式的公式在某一解释中，可能成为命题；也可能不能成为命题。因为可能存在自由变项。

# 赋值

## 定义

给定解释 $I$ ，对公式中每一个自由变项 $x$ 指定 $D_I$ 中的一个值 $\sigma(x)$ ，称作在解释 $I$ 下的**赋值** $\sigma$ 。

- 当给定赋值 $\sigma$ 时，对公式做解释时需要代入赋值 $\sigma$ ，即把所有自由变项 $x$ 替换成 $\sigma(x)$ 。
- 任何谓词公式**在解释和赋值下**的结果都是命题。
- 闭式因为没有自由变项，所以与赋值无关。

**例** 若在上例中添加给定赋值 $\sigma(y) = 0$ ，则在 $I$ 和 $\sigma$ 下， $\exists x(x + y = x \cdot y)$ 被解释为 $\exists x(x + 0 = x \cdot 0)$ ， $\exists x(x = 0)$ ，真值为真。





# 赋值

例  $G(x, y)$  是2元谓词, 解释: 指定  $D$  为实数域,  $G(x, y): x$  大于  $y$ .

此时, 则  $G$  有了确定的含义, 但还不是命题.

如在解释中再给定赋值  $\sigma(x) = \pi = 3.14159$ ,  $\sigma(y) = e = 2.71828$ , 则  $G(\sigma(x), \sigma(y))$  就是命题“ $\pi$  大于  $e$ ”, 其真值为1.

例  $S(x): x^2 + 1 = 0$  是1元谓词.

若解释中的  $x$  的个体域为实数, 则这是一个矛盾式.

若解释中的  $x$  的个体域为复数, 则除了赋值  $\sigma(x) = i$  和  $\sigma(x) = -i$  是真值为1的命题外, 其余情形均为真值为0的命题.



# 解释

例 2.8 给定解释 $I$ 如下:

(a)  $D_1 = \{2,3\}$ ;

(b)  $D_1$ 中特定元素 $a = 2$ ;

(c) 函数 $f(x)$ 为 $f(2) = 3, f(3) = 2$ ;

(d) 谓词 $F(x)$ 为 $F(2) = 0, F(3) = 1$ ;

$G(x, y)$ 为 $G(2, 2) = G(2, 3) = G(3, 2) = 1, G(3, 3) = 0$ ;

$L(x, y)$ 为 $L(2, 2) = L(3, 3) = 1, L(2, 3) = L(3, 2) = 0$ .

在这个解释下, 求下列各式的真值:

(1)  $\forall x \exists y L(x, y)$  (2)  $\exists y \forall x L(x, y)$

这是解释还是赋值?

解

(1)  $\forall x (L(x, 2) \vee L(x, 3)) \Leftrightarrow (L(2, 2) \vee L(2, 3)) \wedge (L(3, 2) \vee L(3, 3)) \Leftrightarrow 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1$

(2)  $\exists y (L(2, y) \wedge L(3, y)) \Leftrightarrow (L(2, 2) \wedge L(3, 2)) \vee (L(2, 3) \wedge L(3, 3)) \Leftrightarrow 0 \vee 0 \Leftrightarrow 0$

此结果进一步说明量词的顺序不能随便颠倒.



# 课堂练习

给定解释 $I$ 如下:

(a) 个体域为整数集合 $\mathbf{Z}$ ;

(b)  $\mathbf{Z}$ 中的特定元素 $a = 0$ ;

(c)  $\mathbf{Z}$ 中的特定函数 $f(x, y) = x - y, g(x, y) = x + y$ ;

(d)  $\mathbf{Z}$ 中的特定谓词 $F(x, y): x < y$ ;

在这个解释下, 求下列各式的真值:

(1)  $\forall x \forall y F(f(x, y), g(x, y))$ ;

(2)  $\forall x \exists y F(f(x, y), g(x, y))$ ;

(3)  $\forall x (F(x, a) \rightarrow F(f(x, y), g(x, y)))$ .



# 课堂练习

给定解释 $I$ 如下:

- (a) 个体域为整数集合 $\mathbf{Z}$ ;
- (b)  $\mathbf{Z}$ 中的特定元素 $a = 0$ ;
- (c)  $\mathbf{Z}$ 中的特定函数 $f(x, y) = x - y, g(x, y) = x + y$ ;
- (d)  $\mathbf{Z}$ 中的特定谓词 $F(x, y): x < y$ ;

在这个解释下, 求下列各式的真值:

(1)  $\forall x \forall y F(f(x, y), g(x, y))$

解

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (x - y < x + y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (0 < 2y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (0 < y)$$

在个体域 $\mathbf{Z}$ 中有小于0的整数,  $\forall y(0 < y)$ 为假, 因此该式在解释 $I$ 下真值为假.



# 课堂练习

给定解释 $I$ 如下:

- (a) 个体域为整数集合 $\mathbf{Z}$ ;
- (b)  $\mathbf{Z}$ 中的特定元素 $a = 0$ ;
- (c)  $\mathbf{Z}$ 中的特定函数 $f(x, y) = x - y, g(x, y) = x + y$ ;
- (d)  $\mathbf{Z}$ 中的特定谓词 $F(x, y): x < y$ ;

在这个解释下, 求下列各式的真值:

$$(2) \forall x \exists y F(f(x, y), g(x, y))$$

解

$$\Leftrightarrow \forall x \exists y (x - y < x + y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \exists y (0 < 2y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \exists y (0 < y)$$

在个体域 $\mathbf{Z}$ 中存在大于0的整数,  $\exists y(0 < y)$ 为真, 因此该式在解释 $I$ 下真值为真.



# 课堂练习

给定解释 $I$ 如下:

(a) 个体域为整数集合 $\mathbf{Z}$ ;

(b)  $\mathbf{Z}$ 中的特定元素 $a = 0$ ;

(c)  $\mathbf{Z}$ 中的特定函数 $f(x, y) = x - y, g(x, y) = x + y$ ;

(d)  $\mathbf{Z}$ 中的特定谓词 $F(x, y): x < y$ ;

在这个解释下, 求下列各式的真值:

$$(3) \forall x (F(x, a) \rightarrow F(f(x, y), g(x, y)))$$

解

$$\Leftrightarrow \forall x ((x < 0) \rightarrow (x - y < x + y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (\neg(x < 0) \vee (-y < y))$$

该式存在自由变项 $y$ 且 $-y < y$ 在个体域 $\mathbf{Z}$ 中真值未知, 因此该式在解释 $I$ 下真值为未知.



同在命题逻辑一样, 在一阶逻辑中也将公式分类为:

## 定义 2.4

设 $A$ 为一公式, 若 $A$ 在任何解释下都为真, 则称 $A$ 为**重言式** (或称**永真式**). 如果 $A$ 在任何解释下都是假的, 则称 $A$ 为**矛盾式** (或称**永假式**). 若至少存在着一种解释使 $A$ 为真, 则称 $A$ 是**可满足式**.

- 重言式一定是可满足式, 但反之不然.
- 一般情况下, 由于谓词公式的复杂性和解释的多样性, 到目前为止, **还没有一个可行的算法**, 用来判断某一**谓词公式**是否是可满足的.

## 定义 2.5

设 $A_0$ 是含命题变项 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 的命题公式,  $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 $n$ 个谓词公式, 用 $A_i (1 \leq i \leq n)$ 处处代替 $A_0$ 中的 $p_i$ , 所得的公式 $A$ 称为 $A_0$ 的**代换实例**.

**例**  $F(x) \rightarrow G(x), \forall xF(x) \rightarrow \exists yG(y)$ 等是 $p \rightarrow q$ 的代换实例;  
 $F(x, y) \wedge \forall xG(x), \forall xF(x) \wedge \exists yG(y)$ 等都可以作为 $p \wedge q$ 的代换实例.

- 可以证明, **重言式的代换实例均为重言式, 矛盾式的代换实例均为矛盾式.**



# 公式类型

例 2.9 判断下列公式中, 哪些是重言式, 哪些是矛盾式?

$$(1) \forall x F(x) \rightarrow (\forall x \exists y G(y) \rightarrow \forall x F(x));$$

$$(2) \left( (\exists x F(x) \vee \exists y G(y)) \wedge \neg \exists y G(y) \right) \rightarrow \exists x F(x);$$

解

(1) 此公式是  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$  的代换实例, 而  $p \rightarrow (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee p) \Leftrightarrow 1$ . 所以(1)是重言式.

(2) 此公式是  $(p \vee q) \wedge \neg q \rightarrow p$  的代换实例, 由析取三段论可知,  $(p \vee q) \wedge \neg q \rightarrow p$  是重言式, 所以(2)是重言式.



# 公式类型

对于不是重言式和矛盾式的代换实例, 判断它们是否为重言式或矛盾式, **确实不是易事**. 但对一些特殊的较简单的公式还是可以判断的.

例 2.10 (1) 讨论该公式的类型:  $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ .

解

设  $I$  为任意一个解释, 其个体域为  $D$ .

- 若  $\exists b \in D$ , 使得  $F(b)$  为假, 则前件  $\forall xF(x)$  为假, 该公式为真.
- 若  $\forall x \in D$ ,  $F(x)$  均为真, 则前件  $\forall xF(x)$  和后件  $\exists xF(x)$  都为真, 从而该公式也为真.
- 由  $I$  的任意性, 所以该公式是重言式.



# 公式类型

例 2.10 (2) 讨论该公式的类型:  $\forall x \exists y F(x, y) \rightarrow \exists x \forall y F(x, y)$ .

解

- 取解释  $I$  如下: 个体域为自然数集  $N$ ,  $F(x, y): x \leq y$ . 在  $I$  下:
  - 前件: 对于任意自然数  $x$ , 存在大于  $x$  的自然数  $y$ , 为真.
  - 后件: 存在自然数  $x$ , 小于任意的自然数  $y$ , 令  $x = 0$  时为真.该公式的前件与后件均为真, 所以该公式不会是矛盾式.

- 再取解释  $I'$  如下: 个体域为自然数集  $N$ ,  $F(x, y): x = y$ . 在  $I'$  下:
  - 前件: 对于任意自然数  $x$ , 存在等于  $x$  的自然数  $y$ , 为真.
  - 后件: 存在自然数  $x$ , 等于任意的自然数  $y$ , 为假.该公式的前件为真, 后件为假, 故为假, 这又说明该公式不会是重言式.

- 综上所述,  $B$  是非重言式的可满足式.



## 课堂练习

判断下列公式中, 哪些是重言式, 哪些是矛盾式?

$$(1) \neg(F(x) \rightarrow G(x, y)) \wedge G(x, y);$$

$$(2) (\forall x F(x) \vee \neg \forall x F(x)) \rightarrow (\exists y G(y) \vee \neg \exists y G(y)).$$



## 课堂练习

判断下列公式中, 哪些是重言式, 哪些是矛盾式?

$$(1) \neg(F(x) \rightarrow G(x, y)) \wedge G(x, y);$$

$$(2) (\forall x F(x) \vee \neg \forall x F(x)) \rightarrow (\exists y G(y) \vee \neg \exists y G(y)).$$

解

(1) 此公式是 $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$ 的代换实例,  $\neg(p \rightarrow q) \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge q \Leftrightarrow 0$ . 所以(1)是矛盾式.

(2) 此公式是 $(p \vee \neg p) \rightarrow (q \vee \neg q)$ 的代换实例,  $(p \vee \neg p) \rightarrow (q \vee \neg q) \Leftrightarrow 1 \rightarrow 1 \Leftrightarrow 1$ 是重言式, 所以(2)是重言式.



## 2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

# 等值式

- 与命题逻辑一样，在一阶逻辑的演算及推理过程中，一些**等值式 (重言等价式)**起着很重要的作用.

## 定义2.6

设 $A, B$ 是一阶逻辑中任意二公式, 若 $A \leftrightarrow B$ 是重言式, 则称 $A$ 和 $B$ 是**等值的**, 记作 $A \Leftrightarrow B$ , 称 $A \Leftrightarrow B$ 为**等值式**.

- 由于重言式的代换实例都是重言式, 1.3节中的24个等值式的代换实例都是一阶逻辑中的等值式.

**例** 在 $P \vee \neg P$ 和 $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ , 若用 $\forall xP(x)$ 代替 $P$ , 用 $\exists xQ(x)$ 代替 $Q$ , 得到重言公式:

$$\begin{aligned} & \forall xP(x) \vee \neg \forall xP(x) \\ & (\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)) \leftrightarrow (\neg \forall xP(x) \vee \exists xQ(x)) \end{aligned}$$



# 换名规则

此外, 对于一阶逻辑, 还有一些**特殊的规则**和等值式:

## 1. 换名规则

- 公式 $\forall xA(x)$ 与 $\exists xA(x)$ 中**用什么符号作为指导变项事实上是无所谓的**. 就好像代数中的求和公式的下标一样, 例如把 $\sum_{i=1}^n a_i$ 中的 $i$ 替换成 $j$ 写成 $\sum_{j=1}^n a_j$ .
- 有时同一个个体变项在同一个公式中:
  - (1) 既有约束出现又有自由出现;
  - (2) 在不同的辖域中约束出现.

为避免混淆, 使一个变项在同一个公式中**不同时是约束的又是自由出现的**, 可采用**换名规则**:

将公式 $A$ 中**某量词辖域中, 某约束变项**的所有出现及**相应的指导变项**, 改成该量词辖域中**未曾出现过的**个体变项符号,  $A$ 中其余部分不变, 则所得公式 $A'$ 与 $A$ 等值.





# 换名规则

例  $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x, y)) \vee \exists zP(x, z)$

解 首先判断约束变项和自由变项.  $x$ 约束出现2次, 自由出现1次,  $y$ 自由出现1次,  $z$ 约束出现1次. 所以只需要对 $x$ 进行换名.

用约束变项 $x$ 的换名规则得:  $\forall u(Q(u) \rightarrow R(u, y)) \vee \exists zP(x, z)$ ;

但下面的换名都是**不对的**.

$\forall u(Q(u) \rightarrow R(x, y)) \vee \exists zP(x, z)$  (辖域内的约束变项漏了)

$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x, u)) \vee \exists zP(x, z)$  ( $y$ 并不需要换名)

$\forall u(Q(u) \rightarrow R(u, y)) \vee \exists zP(u, z)$  (辖域外的自由变项也被换了)

$\forall y(Q(y) \rightarrow R(y, y)) \vee \exists zP(x, z)$  (换成现有的个体变项符号)



2. 在**有限**个体域 $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 中消去量词等值式.

- 全称量词可看作是合取联结词的推广.
- 存在量词可看作是析取联结词的推广.

$$(1) \forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$$

$$(2) \exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$$



# 等值式

## 3. 量词否定等值式 (超常用):

$$(1) \neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$(2) \neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

- 反映量词的特性以及量词与联结词之间的关系.
- 量词否定等值式的本质就是德·摩根律, 当个体域为有限集  $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 其证明如下:

**证明**  $\neg \forall x A(x)$

$$\Leftrightarrow \neg (A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n))$$

$$\Leftrightarrow \neg A(a_1) \vee \neg A(a_2) \vee \dots \vee \neg A(a_n)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

**证明**  $\neg \exists x A(x)$

$$\Leftrightarrow \neg (A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n))$$

$$\Leftrightarrow \neg A(a_1) \wedge \neg A(a_2) \wedge \dots \wedge \neg A(a_n)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

# 等值式

例2.12(1) 用基本的等值式证明以下公式是等值的:

$$\neg \exists x (F(x) \wedge \neg G(x)) \Leftrightarrow \forall x (F(x) \rightarrow G(x))$$

解

$$\begin{aligned} & \neg \exists x (F(x) \wedge \neg G(x)) \\ \Leftrightarrow & \forall x \neg (F(x) \wedge \neg G(x)) && \text{(量词否定等值式)} \\ \Leftrightarrow & \forall x (\neg F(x) \vee G(x)) && \text{(德·摩根律)} \\ \Leftrightarrow & \forall x (F(x) \rightarrow G(x)) && \text{(蕴涵等值式)} \end{aligned}$$

# 等值式

## 4. 量词辖域收缩与扩张等值式, $B$ 中不含有约束变项 $x$ :

- (1)  $\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \vee B$  ( $\forall$ 可交换, 本质是分配律)
- (2)  $\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge B$  ( $\wedge$ 可交换, 本质是幂等律)
- (3)  $\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \rightarrow B$  (蕴涵等值式后使用(1), 再用量词否定等值式)
- (4)  $\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall xA(x)$  (蕴涵等值式后使用(1))
- (5)  $\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee B$  ( $\vee$ 可交换, 本质是幂等律)
- (6)  $\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge B$  ( $\wedge$ 可交换, 本质是分配律)
- (7)  $\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall xA(x) \rightarrow B$  (蕴涵等值式后使用(5), 再用量词否定等值式)
- (8)  $\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists xA(x)$  (蕴涵等值式后使用(5))

只要 $A(x)$ 前没有  
 $\neg$ ,  $\forall$ 和 $\exists$ 就不用换



# 等值式

## 5. 量词分配等值式

$$(1) \forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$$

$$(2) \exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

- 量词分配等值式表明,  $\forall$ 对 $\wedge$ ,  $\exists$ 对 $\vee$ 有分配律, 其本质是结合律.
- 然而,  $\forall$ 对 $\vee$ ,  $\exists$ 对 $\wedge$ 无分配律. 即:

$$(1) \forall x(A(x) \vee B(x)) \not\Leftrightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$$

$$(2) \exists x(A(x) \wedge B(x)) \not\Leftrightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

此处双向不成立, 但是单向是否成立呢?

- 此时无法进行量词辖域收缩了, 但是能否进行量词辖域扩张呢? 可以, 使用换名规则!



# 等值式

**例** 证明 $\forall$ 对 $\vee$ ,  $\exists$ 对 $\wedge$ 无分配律.

**解** 证明不成立只需举一反例即可, 即在某种解释下, 两公式不等值. 设个体域为自然数集合 $\mathbf{N}$ ,  $A(x)$ 表示“ $x$ 是奇数”,  $B(x)$ 表示“ $x$ 是偶数”.

(1)  $\forall x(A(x) \vee B(x))$ 的涵义为: 任意的自然数不是奇数就是偶数, 这是真命题. 而 $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ 的涵义为: 所有的自然数都是奇数或所有的自然数都是偶数, 这是假命题. 因此 $\forall x(A(x) \vee B(x)) \not\equiv \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ .

(2)  $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ 的涵义为: 存在奇数的自然数, 也存在偶数的自然数, 这是真命题. 而 $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ 的涵义为: 要求存在一个自然数, 它既是奇数, 同时又是偶数, 这是假命题. 因此 $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \not\equiv \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ .



# 等值式

例2.11 设个体域为 $D = \{a, b, c\}$ , 消去下列公式中的量词:

$$(1) \exists x(F(x) \wedge G(y))$$

解  $\Leftrightarrow \exists xF(x) \wedge G(y)$  (量词辖域收缩, 令 $B = G(y)$ )

$$\Leftrightarrow (F(a) \vee F(b) \vee F(c)) \wedge G(y)$$
 (有限个体域中消去量词)

$$(2) \forall x(F(x) \rightarrow \exists yG(y))$$

解  $\Leftrightarrow \exists xF(x) \rightarrow \exists yG(y)$  (量词辖域收缩, 令 $B = \exists yG(y)$ )

$$\Leftrightarrow (F(a) \vee F(b) \vee F(c)) \rightarrow (G(a) \vee G(b) \vee G(c))$$

(有限个体域中消去量词)





# 课堂练习

证明下列等值式:

$$(1) \exists x(F(x) \rightarrow G(x)) \Leftrightarrow \forall xF(x) \rightarrow \exists xG(x)$$

$$(2) \forall xF(x) \vee \neg \forall xG(x) \Leftrightarrow \forall x\exists y(F(x) \vee \neg G(y))$$



# 课堂练习

证明下列等值式:

$$(1) \exists x(F(x) \rightarrow G(x)) \Leftrightarrow \forall xF(x) \rightarrow \exists xG(x)$$

解

$$\begin{aligned} & \exists x(F(x) \rightarrow G(x)) \\ \Leftrightarrow & \exists x(\neg F(x) \vee G(x)) && (\text{蕴涵等值式}) \\ \Leftrightarrow & \exists x\neg F(x) \vee \exists xG(x) && (\text{量词分配等值式}) \\ \Leftrightarrow & \neg\forall xF(x) \vee \exists xG(x) && (\text{量词否定等值式}) \\ \Leftrightarrow & \forall xF(x) \rightarrow \exists xG(x) && (\text{蕴涵等值式}) \end{aligned}$$



## 课堂练习

证明下列等值式:

$$(2) \forall x F(x) \vee \neg \forall x G(x) \Leftrightarrow \forall x \exists y (F(x) \vee \neg G(y))$$

解

$$\begin{aligned} & \forall x F(x) \vee \neg \forall x G(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x F(x) \vee \neg \forall y G(y) \quad (\text{换名规则}) \\ \Leftrightarrow & \forall x F(x) \vee \exists y \neg G(y) \quad (\text{量词否定等值式}) \\ \Leftrightarrow & \forall x (F(x) \vee \exists y \neg G(y)) \quad (\text{量词辖域扩张, 令 } B = \exists y \neg G(y)) \\ \Leftrightarrow & \forall x \exists y (F(x) \vee \neg G(y)) \quad (\text{量词辖域扩张, 令 } B = F(x)) \end{aligned}$$



# 前束范式

## 定义2.11

设 $A$ 为一谓词公式, 若 $A$ 具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_kx_kB$$

则称 $A$ 为前束范式. 其中,  $Q_i(1 \leq i \leq k)$ 为量词 $\forall$ 或 $\exists$ ,  $B$ 为不含量词的谓词公式.

■ 即公式的所有量词均出现在公式的最前面, 且它们的辖域一直延伸到公式的末尾.

例 (1)  $\forall x (F(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge H(x, y)))$ 不是前束范式;

(2)  $\exists x \forall y (G(y) \rightarrow H(x, y, z)) \rightarrow F(x)$ 不是前束范式;

(3)  $\exists x \forall y \forall z \left( \left( P(x, y) \wedge (\neg Q(x)) \right) \rightarrow \left( R(y, z) \vee (\neg Q(x)) \right) \right)$ 是前束范式;

(4)  $\forall x \exists y \forall z (P(x) \rightarrow Q(y) \wedge R(x, z))$ 是前束范式.



# 前束范式

**定理** 任一谓词公式都可以化成为与之等值的前束范式.

**证明** 构造性算法步骤如下:

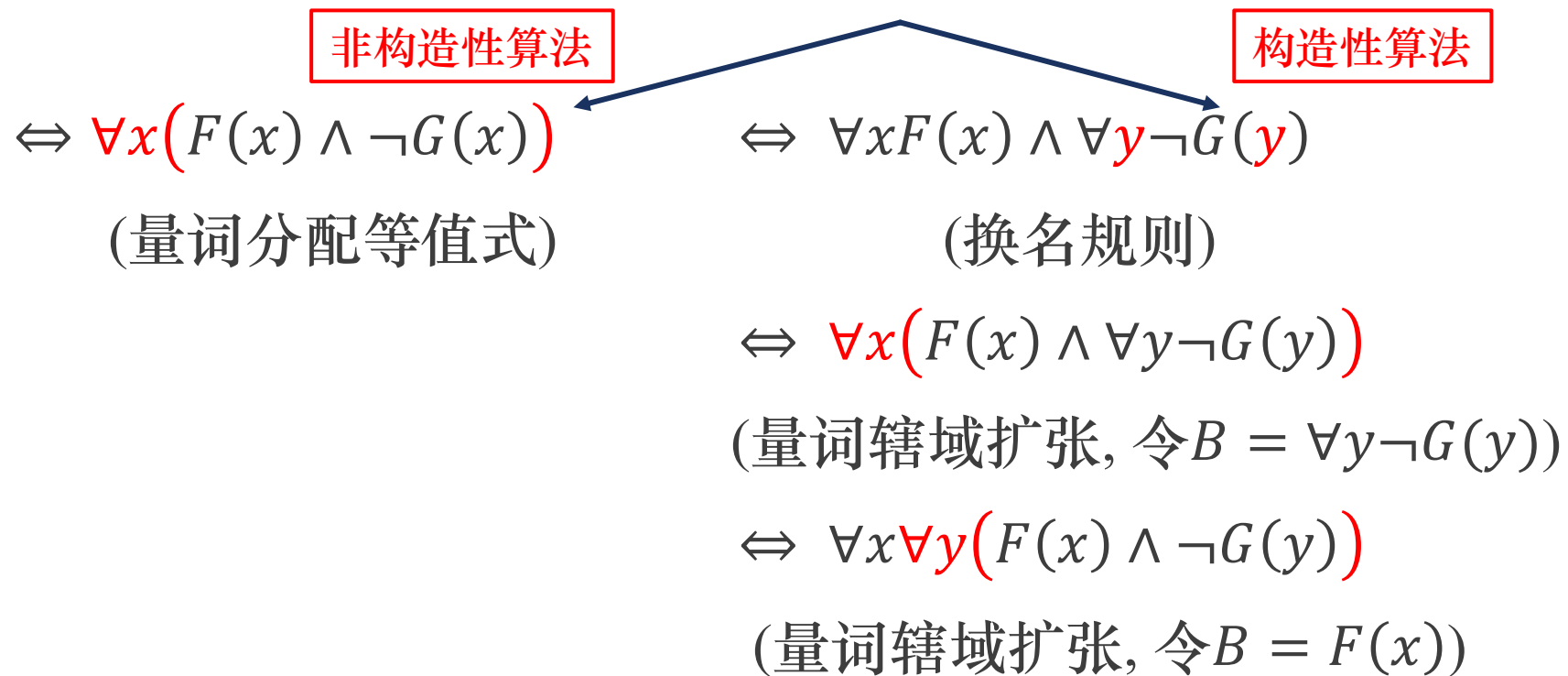
- (1) 消去联结词 $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ .
  - (2) 将联结词 $\neg$ 向内深入, 使之只作用于原子公式.
  - (3) 利用换名规则使**所有约束变项的符号均不同**, 并且**自由变项与约束变项的符号也不同**.
  - (4) 利用量词辖域的扩张和收缩或量词分配等值式, 将所有量词以在公式中出现的顺序移到公式最前面, 扩大量词的辖域至整个公式.
- **前束范式的形式可能不是惟一的.**
  - 不一定非要使用该构造性算法, 虽然构造性算法总能转化为前束范式.



# 前束范式

例 2.14 (1) 求  $\forall xF(x) \wedge \neg\exists xG(x)$  的前束范式.

解  $\Leftrightarrow \forall xF(x) \wedge \forall x\neg G(x)$  (量词否定等值式)



# 前束范式

例2.14(2)  $\forall xF(x) \vee \neg \exists xG(x)$ 的前束范式.

解  $\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall x\neg G(x)$  (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall y\neg G(y)$  (换名规则)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \vee \forall y\neg G(y))$  (量词辖域扩张, 令  $B = \forall y\neg G(y)$ )

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x) \vee \neg G(y))$  (量词辖域扩张, 令  $B = F(x)$ )



# 前束范式

例2.14(4) 求 $\forall xF(x) \rightarrow \exists xG(x)$ 的前束范式.

$$\begin{aligned}\text{解} &\Leftrightarrow \forall xF(x) \rightarrow \exists yG(y) && \text{(换名规则)} \\ &\Leftrightarrow \exists x(F(x) \rightarrow \exists yG(y)) && \text{(量词辖域扩张, 令 } B = \exists yG(y)) \\ &\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x) \rightarrow G(y)) && \text{(量词辖域扩张, 令 } B = F(x))\end{aligned}$$

例2.14(5) 求 $\exists xF(x) \rightarrow \forall xG(x)$ 的前束范式.

$$\begin{aligned}\text{解} &\Leftrightarrow \exists yF(y) \rightarrow \forall xG(x) && \text{(换名规则)} \\ &\Leftrightarrow \forall y(F(y) \rightarrow \forall xG(x)) && \text{(量词辖域扩张, 令 } B = \forall xG(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall y\forall x(F(y) \rightarrow G(x)) && \text{(量词辖域扩张, 令 } B = F(y))\end{aligned}$$





# 前束范式

例2.14(7) 求 $(\forall xF(x, y) \rightarrow \exists yG(y)) \rightarrow \forall xH(x, y)$ 的前束范式.

$$\begin{aligned} \text{解} &\Leftrightarrow (\forall xF(x, y) \rightarrow \exists tG(t)) \rightarrow \forall wH(w, y) && \text{(换名规则)} \\ &\Leftrightarrow (\exists x(F(x, y) \rightarrow \exists tG(t))) \rightarrow \forall wH(w, y) && \text{(量词辖域扩张, 令 } B = \exists tG(t)) \\ &\Leftrightarrow \exists x\exists t (F(x, y) \rightarrow G(t)) \rightarrow \forall wH(w, y) && \text{(量词辖域扩张, 令 } B = F(x, y)) \\ &\Leftrightarrow \forall x (\exists t(F(x, y) \rightarrow G(t)) \rightarrow \forall wH(w, y)) && \text{(量词辖域扩张, 令 } B = \forall wH(w, y)) \\ &\Leftrightarrow \forall x\forall t ((F(x, y) \rightarrow G(t)) \rightarrow \forall wH(w, y)) && \text{(量词辖域扩张, 令 } B = \forall wH(w, y)) \\ &\Leftrightarrow \forall x\forall t\forall w ((F(x, y) \rightarrow G(t)) \rightarrow H(w, y)) && \text{(量词辖域扩张, 令 } B = (F(x, y) \rightarrow G(t))) \end{aligned}$$



# 前束范式

例2.14(8) 求 $(\forall xF(x, y) \vee \forall yG(x, y)) \wedge \exists zH(x, y, z)$ 的前束范式.

$$\begin{aligned} \text{解} &\Leftrightarrow (\forall tF(t, y) \vee \forall wG(x, w)) \wedge \exists zH(x, y, z) && \text{(换名规则)} \\ &\Leftrightarrow \forall t(F(t, y) \vee \forall wG(x, w)) \wedge \exists zH(x, y, z) && \text{(量词辖域扩张, 令 } B = \forall wG(x, w)) \\ &\Leftrightarrow \forall t\forall w(F(t, y) \vee G(x, w)) \wedge \exists zH(x, y, z) && \text{(量词辖域扩张, 令 } B = F(t, y)) \\ &\Leftrightarrow \forall t(\forall w(F(t, y) \vee G(x, w)) \wedge \exists zH(x, y, z)) && \text{(量词辖域扩张, 令 } B = \exists zH(x, y, z)) \\ &\Leftrightarrow \forall t\forall w((F(t, y) \vee G(x, w)) \wedge \exists zH(x, y, z)) && \text{(量词辖域扩张, 令 } B = \exists zH(x, y, z)) \\ &\Leftrightarrow \forall t\forall w\exists z((F(t, y) \vee G(x, w)) \wedge H(x, y, z)) && \text{(量词辖域扩张, 令 } B = (F(t, y) \vee G(x, w))) \end{aligned}$$



# 前束范式

- 前束范式的优点在于它的量词全部集中在公式的前面，此部分称为公式的**首标**.
- 而公式的其余部分可看作是一个不含量词的谓词公式，它被称为公式的**尾部**.
- 由于在一阶逻辑中的**判定问题无解**，因此前束范式并不象命题逻辑中的范式那样能解决判定问题.
- 前束范式只是使公式的形式比较整齐规范，为判定工作提供一些方便.

**总结: 只是好看, 没啥用**



# 前束范式

- 在求给定谓词公式的前束范式时, 对量词的左移的次序**没有机械地规定**, 对于尾部**也没有进一步的要求**, 因此一个公式的前束范式是不唯一的.

## 例

$$\forall xF(x) \wedge \exists yG(y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x\exists y(F(x) \wedge G(y)) \quad \text{先对}\forall x\text{进行辖域扩张}$$

$$\Leftrightarrow \exists y\forall x(F(x) \wedge G(y)) \quad \text{先对}\exists y\text{进行辖域扩张}$$

- 此时, 量词的顺序不影响公式的意义以及真值.
- 然而需要注意的是, 该情形仅适用于一元谓词. 当辖域中存在二元谓词且其中变项都是被约束的, 不能改变量词的顺序, 例如 $\forall x\exists y(F(x, y) \wedge G(y))$ .



# 课堂练习

求以下公式的前束范式.

$$(1) (\forall x F(x) \vee \exists y G(y)) \rightarrow \forall x H(x)$$

$$(2) \forall x F(x) \rightarrow \exists y G(x, y)$$



# 课堂练习

求以下公式的前束范式.

$$(1) (\forall xF(x) \vee \exists yG(y)) \rightarrow \forall xH(x)$$

解

$$(\forall xF(x) \vee \exists yG(y)) \rightarrow \forall xH(x)$$

$$\Leftrightarrow (\forall xF(x) \vee \exists yG(y)) \rightarrow \forall zH(z)$$

(换名规则)

$$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \vee \exists yG(y)) \rightarrow \forall zH(z)$$

(量词辖域扩张, 令  $B = \exists yG(y)$ )

$$\Leftrightarrow \forall x\exists y(F(x) \vee G(y)) \rightarrow \forall zH(z)$$

(量词辖域扩张, 令  $B = F(x)$ )

$$\Leftrightarrow \exists x(\exists y(F(x) \vee G(y)) \rightarrow \forall zH(z))$$

(量词辖域扩张, 令  $B = \forall zH(z)$ )

$$\Leftrightarrow \exists x\forall y(F(x) \vee G(y) \rightarrow \forall zH(z))$$

(量词辖域扩张, 令  $B = \forall zH(z)$ )

$$\Leftrightarrow \exists x\forall y\forall z(F(x) \vee G(y) \rightarrow H(z))$$

(量词辖域扩张, 令  $B = F(x) \vee G(y)$ )



# 课堂练习

求以下公式的前束范式.

$$(2) \forall x F(x) \rightarrow \exists y G(x, y)$$

解

$$\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \forall z F(z) \rightarrow \exists y G(x, y)$$

(换名规则)

$$\Leftrightarrow \exists z (F(z) \rightarrow \exists y G(x, y))$$

(量词辖域扩张, 令  $B = \exists y G(x, y)$ )

$$\Leftrightarrow \exists z \exists y (F(z) \rightarrow G(x, y))$$

(量词辖域扩张, 令  $B = F(z)$ )



## 2.4 一阶逻辑推理理论



# 一阶逻辑推理理论

利用谓词公式间的各种等值关系和蕴涵关系, 通过一些推理规则, 从一些谓词公式推出另一些谓词公式, 这就是一阶谓词中的推理.

**定义** 在一阶谓词中, **推理**的形式结构仍为

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n) \rightarrow C$$

若该公式为重言式, 则称**推理正确**, 称 $C$ 是 $H_1, H_2, \dots, H_n$ 的逻辑结论. 这里 $H_1, H_2, \dots, H_n, C$ 均为一阶谓词中的合式公式.

- 判断推理是否为重言式比在命题逻辑中**困难得多**.
- 在本节着重介绍构造证明的方法.



# 推理定律

在一阶谓词中仍称重言的蕴涵式为**推理定律**. 推理定律的一般来源有以下几种:

(1) 命题逻辑中重言蕴涵式的**代换实例**. 例如,

$$\forall xF(x) \wedge \exists yG(y) \Rightarrow \forall xF(x) \quad (\text{化简})$$

$$\exists xF(x) \Rightarrow \exists xF(x) \vee \exists yG(y) \quad (\text{附加})$$

(2) 每个基本等值式生成2条推理定律. 例如,

$$\neg \forall xF(x) \Leftrightarrow \exists x \neg F(x)$$

$$\neg \exists xF(x) \Leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$



(3) 关于量词分配的4条推理定律, 称为**量词分配蕴涵律**:

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$$

$$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$$

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

■ **注意量词分配蕴涵律和量词分配等值式的区别.**



# 推理规则

- 在推理过程中，除用到命题中已介绍的11条推理规则外，还有下面4条推理规则，不过使用它们是有条件的。
- 在以下4条规则中，均使用了 $A \Rightarrow B$ 的形式，但在这里 $A \Rightarrow B$ 不一定表示 $A \rightarrow B$ 为重言式，而只是表明**在一定条件下**，当 $A$ 为真时， $B$ 也为真的推理关系。
- 在使用以下规则时**均要注意条件**，否则会犯错误。



# 推理规则

一. 全称量词消去规则, 简称为UI规则 (Universal Instantiation).

这条规则有以下两种形式:

$$\forall xA(x) \Rightarrow A(y)$$

$$\forall xA(x) \Rightarrow A(c)$$

UI规则成立的条件是:

- (1)  $x$ 是 $A(x)$ 中自由出现的个体变项;
  - (2) 在第1式中,  $y$ 为**任意的**不在 $A(x)$ 中约束出现的个体变项;
  - (3) 在第2式中,  $c$ 为**任意的**个体常项.
- UI规则的意思: 如果个体域的**所有个体都具有性质 $A$** , 则个体域中的**任一个个体具有性质 $A$** .



# 推理规则

**例** 设个体域 $D$ 为实数集,  $F(x, y): x < y$ , 则  $\forall x \exists y F(x, y)$ : 对任意的实数 $x$ , 都存在实数 $y$ , 使 $x < y$ , 这是真命题.

- 若设 $A(x) = \exists y F(x, y)$ ,  $x$ 在 $A(x)$ 中是自由出现的, 因此条件(1)是满足的. 由于 $y$ 在 $\exists y F(x, y)$ 中是约束出现, 若在消去量词时用 $y$ 取代 $x$ , 得

$$\forall x \exists y F(x, y) \Rightarrow \exists y F(y, y),$$

其含义为“存在 $y, y < y$ ”, 这是假命题, 出错的原因是违背了条件(2).

- 若使用 $z$ 取代 $x$ , 则可满足条件2, 因为 $z$ 在 $\exists y F(x, y)$ 中不是约束出现. 因此可得

$$\forall x \exists y F(x, y) \Rightarrow \exists y F(z, y).$$

$z$ 在 $\exists y F(z, y)$ 中是自由出现, 上式推理成立意味着无论 $z$ 取任何值,  $\exists y F(z, y)$ 均为真.



二. 全称量词引入规则, 简称为UG规则 (Universal Generalization) .

$$A(y) \Rightarrow \forall xA(x)$$

UG规则成立的条件是:

(1)  $y$ 在 $A(y)$ 中自由出现, 且 $y$ 取任何值时,  $A$ 均为真;

(2) 取代 $y$ 的 $x$ 不能在 $A(y)$ 中约束出现.

■ UG规则的意思: 若个体域中任意一个个体都具有性质 $A$ , 则个体域中的全体个体都具有性质 $A$ .



# 推理规则

**例** 仍取实数集合中的 $F(x, y): x < y$ , 令 $A(y) = \exists x F(x, y)$ .

- $y$ 在 $A(y)$ 中是自由出现的, 并且对任意给定的 $y$ ,  $A(y)$ 是真命题. 此时 $A(y)$ 满足条件(1).
- 在应用UG规则时, 若用 $x$ 取代 $y$ , 得 $\forall x \exists x (x < x)$ , 则是假命题. 出错的原因是违背了条件(2), 即取代 $y$ 的 $x$ 在 $A(y)$ 中是约束出现的.
- 若使用 $z$ 取代 $y$ , 得 $\forall z \exists x (x < z)$ , 则是真命题. 因为其满足条件(2), 即取代 $y$ 的 $z$ 在 $A(y)$ 中不是约束出现.





三. 存在量词引入规则, 简称为EG规则 (Existential Generalization).

$$A(c) \Rightarrow \exists xA(x)$$

EG规则成立的条件是:

(1)  $c$ 为特定的个体常项; (不要要求 $A(c)$ 为真)

(2) 取代 $c$ 的 $x$ 不能在 $A(c)$ 中出现.

■ EG规则的意思是: 如果个体域中有某一个体 $c$ 具有性质 $A$ , 则个体域中存在着具有性质 $A$ 的个体.



# 推理规则

**例** 还考虑集合中的 $F(x, y): x < y$ , 令 $A(c) = \exists xF(x, c)$ 并取 $c = 3$ , 则 $A(3) = \exists xF(x, 3)$ .

- $A(3)$ 是真命题. 3是特定的个体常项, 因此条件(1)满足.
- 若用 $x$ 取代3, 则得到 $\exists x\exists xF(x, x)$ , 这是假命题. 出错的原因是 $x$ 在 $\exists xF(x, 3)$ 中出现, 违背了条件(2).
- 若用 $y$ 取代3, 则得到 $\exists y\exists xF(x, y)$ , 这是真命题,  $y$ 没有在 $\exists xF(x, 3)$ 中出现, 满足条件(2).



四. 存在量词消去规则, 简称EI规则 (Existential Instantiation) :

$$\exists xA(x) \Rightarrow A(c)$$

EI规则成立的条件是:

- (1)  $c$ 是使 $A$ 为真的特定的个体常项;
  - (2)  $c$ 不在 $A(x)$ 中出现;
  - (3) 若 $A(x)$ 中除 $x$ 外还有其它自由变项时, 不能用此规则.
- EI规则的意思是: 如果个体域存在有性质 $A$ 的个体, 则个体域中必有某一个个体 $c$ 具有性质 $A$ .
  - 必须注意: 这里的个体 $c$ 不是任意的, 并且用EI时 $A(x)$ 中只能有一个变项.



# 推理规则

**例** 个体域为自然数集 $\mathbf{N}$ , 设 $F(x)$ :  $x$ 是奇数;  $G(x)$ :  $x$ 是偶数.  $\exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$ 是真命题, 而 $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ 是假命题.

若令前提:  $\exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$ , 结论:  $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ , 看下面这一段推导:

**证明**

(1)	$\exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$	前提引入
(2)	$\exists xF(x)$	(1)化简
(3)	$F(c)$	(2)EI
(4)	$\exists xG(x)$	(1)化简
(5)	$G(c)$	(4)EI
(6)	$F(c) \wedge G(c)$	(3), (5)合取引入
(7)	$\exists x(F(x) \wedge G(x))$	(6) EG规则

- 为什么由真命题推出了假命题呢? 原因是**违背了EI规则的条件(1)**. (2)的 $c$ 是使 $F(x)$ 为真的个体常项, 即某奇数, 此 $c$ 不能使 $G(x)$ 为真, 于是(5)中的 $G(c)$ 是不成立的. 所以(5)应改为 $G(d)$ ,  $d$ 是某偶数.



# 推理规则

**例** 个体域 $D$ 为实数集, 仍取 $F(x, y): x < y$ ,  $\forall x \exists y(x < y)$ 是真命题, 然而 $\forall x(x < c)$ 是假命题.

若令前提:  $\forall x \exists y(x < y)$ , 结论:  $\forall x(x < c)$ , 看下面这一段推导:

(1)  $\forall x \exists y(x < y)$       前提引入

(2)  $\exists y(z < y)$       (1)UI

(3)  $z < c$       (2)EI

(4)  $\forall x(x < c)$       (3)UG

- 结论(4)是错的, 出错原因是**违背了EI规则的条件(3)**, 对(2)使用EI规则时,  $\exists y(z < y)$ 中有自由变项 $z$ , 因为不能使用EI规则.
  - 其实同时也违背了EI规则的条件(1), 因为 $z < c$ 不为真.



# 推理规则

- 在使用以上4个规则时，要**严格按照限制条件**去使用，并**从整体上考虑**个体变项和常项符号的选择，否则会犯错误。
- 这4个规则可形象地称为：“**脱帽**”与“**戴帽**”规则，
  - 对全称量词“**脱帽(UI)容易戴帽难(UG)**”，
  - 对存在量词“**戴帽(EG)容易脱帽难(EI)**”。



# 推理规则

例 2.16 证明苏格拉底三段论：“凡人都要死的. 苏格拉底是人. 所以苏格拉底是要死的”.

解 由于没指明个体域, 所以应该使用全总个体域.

设 $F(x)$ :  $x$ 是人;  $G(x)$ :  $x$ 是要死的,  $c$ : 苏格拉底.

前提:  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), F(c)$ ;

结论:  $G(c)$ .

证明: (1) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$	前提引入
(2) $F(c) \rightarrow G(c)$	(1)UI
(3) $F(c)$	前提引入
(4) $G(c)$	(2), (3)假言推理

# 推理规则

例 2.15(1) 用构造证明法证明下面的推理:

前提:  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \exists xF(x)$ .

结论:  $\exists xG(x)$

证明 (1) $\exists xF(x)$	前提引入
(2) $F(c)$	(1)EI
(3) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$	前提引入
(4) $F(c) \rightarrow G(c)$	(3)UI
(5) $G(c)$	(2), (4)假言推理
(6) $\exists xG(x)$	(5)EG





# 推理规则

上例的证明每一步都是严格按推理规则及应满足的条件进行的. 此证明**不能**如下进行:

(1)  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$       前提引入

(2)  $F(c) \rightarrow G(c)$             (1)UI

(3)  $\exists xF(x)$                     前提引入

(4)  $F(c)$                         (3)EI

...

- 在以上过程中, (4)是错误的, 违背了EI规则的条件(1): “ $c$ 是使 $A$ 为真的特定的个体常项”. **因为 $F(c) \rightarrow G(c)$ 中的 $c$ 不一定满足(4)中的 $c$ .**
- 然而, 把(4)放在(2)前面是满足推理规则的, 因为UI规则中的条件(3)为“ $c$ 为任意的个体常项”.
- 一般来说, EI规则中得到的常数, 一定满足UI中的条件, 但反之不真, 所以一定要**注意先后顺序**.



# 推理规则

例 2.15(2) 用构造证明法证明下面的推理:

前提:  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \exists x(F(x) \wedge H(x))$ .

结论:  $\exists x(G(x) \wedge H(x))$

证明	(1) $\exists x(F(x) \wedge H(x))$	前提引入
	(2) $F(c) \wedge H(c)$	(1)EI
	(3) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$	前提引入
	(4) $F(c) \rightarrow G(c)$	(3)UI
	(5) $F(c)$	(2)化简
	(6) $G(c)$	(4), (5)假言推理
	(7) $H(c)$	(2)化简
	(8) $G(c) \wedge H(c)$	(6), (7)合取引入
	(9) $\exists x(G(x) \wedge H(x))$	(8)EG

此处也需要注意:  
一定现有(2), 再有(4)



# 推理规则

例2.17 用构造证明法证明下面的推理:

前提:  $\neg\exists x(F(x) \wedge H(x)), \forall x(G(x) \rightarrow H(x))$ .

结论:  $\forall x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$ .

证明 (1)	$\neg\exists x(F(x) \wedge H(x))$	前提引入
(2)	$\forall x(\neg F(x) \vee \neg H(x))$	(1)量词否定等值式&德·摩根律
(3)	$\forall x(H(x) \rightarrow \neg F(x))$	(2)蕴涵等值式
(4)	$H(y) \rightarrow \neg F(y)$	(3)UI
(5)	$\forall x(G(x) \rightarrow H(x))$	前提引入
(6)	$G(y) \rightarrow H(y)$	(5)UI
(7)	$G(y) \rightarrow \neg F(y)$	(6), (4)假言三段论
(8)	$\forall x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$	(7)UG

该证明要注意两点:

1. 因为结论中的量词是 $\forall$ , 所以在一开始构造时就要想着如何使用UG规则, 以及如何使用自由变项 $y$ 取代 $x$ .
2. 不能将(3)和(5)中的 $x$ 使用UI规则变成个体常项 $c$ , 因为我们要的是自由变项 $y$ .



证明以下量词分配蕴涵律, 并说明反向为什么不成立

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$$

$$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$



# 课堂练习

证明以下量词分配蕴涵律, 并说明反向为什么不成立

$$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$$

证明

$\Rightarrow$

- (1)  $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$       前提引入
- (2)  $\forall xA(x) \vee \forall yB(y)$       (1)换名
- (3)  $\forall x(A(x) \vee \forall yB(y))$       (2)辖域扩张
- (4)  $A(z) \vee \forall yB(y)$       (3)UI
- (5)  $\forall y(A(z) \vee B(y))$       (4)辖域扩张
- (6)  $A(z) \vee B(z)$       (5)UI
- (7)  $\forall x(A(x) \vee B(x))$       (6)UG

$\Leftarrow$

- (1)  $\forall x(A(x) \vee B(x))$       前提引入
- (2)  $A(y) \vee B(y)$       (1)UI
- X** (3)  $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$       (4)UG



# 课堂练习

证明以下量词分配蕴涵律, 并说明反向为什么不成立

$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

证明

$\Rightarrow$

- |  |            |
|--|------------|
| (1) $\exists x(A(x) \wedge B(x))$        | 前提引入       |
| (2) $A(c) \wedge B(c)$                   | (1)EI      |
| (3) $A(c)$                               | (2)化简      |
| (4) $B(c)$                               | (3)化简      |
| (5) $\exists xA(x)$                      | (3)EG      |
| (6) $\exists xB(x)$                      | (4)EG      |
| (7) $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ | (5)(6)合取引入 |

$\Leftarrow$

- |  |                  |
|--|------------------|
| (1) $\exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$ | 前提引入             |
| (2) $\exists xA(x)$                      | (1)化简            |
| (3) $\exists xB(x)$                      | (1)化简            |
| (4) $A(c)$                               | (2)EI            |
| <del>(5) <math>B(c)</math></del>         | <del>(3)EI</del> |
| (6) $A(c) \wedge B(c)$                   | (4)(5)合取引入       |
| (7) $\exists x(A(x) \wedge B(x))$        | (4)EG            |

使用EI时需要谨慎, 已经满足了A(c)的c, 不一定满足B(c).



# 推理规则

例 用归谬法证明  $\exists xA(x) \rightarrow \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B(x))$

## 证明

(1) $\neg \forall x(A(x) \rightarrow B(x))$	否定结论引入	(7) $\neg B(a)$	(5) 化简
(2) $\exists x \neg(A(x) \rightarrow B(x))$	(1) 量词否定等值式	(8) $\exists x A(x)$	(6) EG
(3) $\neg(A(a) \rightarrow B(a))$	(2) EI	(9) $\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$	前提引入
(4) $\neg(\neg A(a) \vee B(a))$	(3) 蕴涵等值式	(10) $\forall x B(x)$	(8), (9) 假言推理
(5) $A(a) \wedge \neg B(a)$	(4) 德·摩根律	(11) $B(a)$	(10) UI
(6) $A(a)$	(5) 化简	(12) $B(a) \wedge \neg B(a)$	(7), (11) 矛盾



# 推理规则

例 用附加前提证明法证明以下量词分配蕴涵律:

$$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$$

$$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$$

## 证明1

- |  |            |
|--|------------|
| (1) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ | 前提引入       |
| (2) $A(y) \rightarrow B(y)$            | (1)UI      |
| (3) $\forall xA(x)$                    | 附加前提引入     |
| (4) $A(y)$                             | (3)UI      |
| (5) $B(y)$                             | (2)(4)假言推理 |
| (6) $\forall xB(x)$                    | (5)UG      |

## 证明2

- |  |            |
|--|------------|
| (1) $\exists xA(x)$                    | 附加前提引入     |
| (2) $A(c)$                             | (1)EI      |
| (3) $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ | 前提引入       |
| (4) $A(c) \rightarrow B(c)$            | (3)UI      |
| (5) $B(c)$                             | (2)(4)假言推理 |
| (6) $\exists xB(x)$                    | (5)EG      |





# 推理规则

**例** 有些迷妹喜欢所有的小鲜肉. 但是所有迷妹都不喜欢吊丝. 所以, 没有一个小鲜肉是吊丝. 证明上述推理是正确的.

**解** 设 $F(x)$ :  $x$ 是迷妹,  $G(x)$ :  $x$ 是小鲜肉,  $H(x)$ :  $x$ 是吊丝,  $L(x, y)$ :  $x$ 喜欢 $y$ .

前提:  $\exists x (F(x) \wedge \forall y (G(y) \rightarrow L(x, y)))$ ,  $\forall x (F(x) \rightarrow \forall y (H(y) \rightarrow \neg L(x, y)))$

结论:  $\neg \exists x (G(x) \wedge H(x))$

**证明**

(1) $\exists x (F(x) \wedge \forall y (G(y) \rightarrow L(x, y)))$	前提引入	(8) $\forall y (L(c, y) \rightarrow \neg H(y))$	(7)假言易位
(2) $F(c) \wedge \forall y (G(y) \rightarrow L(c, y))$	(1)EI	(9) $G(z) \rightarrow L(c, z)$	(4)UI
(3) $F(c)$	(2)化简	(10) $L(c, z) \rightarrow \neg H(z)$	(8)UI
(4) $\forall y (G(y) \rightarrow L(c, y))$	(2)化简	(11) $G(z) \rightarrow \neg H(z)$	(9), (10)假言三段论
(5) $\forall x (F(x) \rightarrow \forall y (H(y) \rightarrow \neg L(x, y)))$	前提引入	(12) $\forall x (G(x) \rightarrow \neg H(x))$	(11)UG
(6) $F(c) \rightarrow \forall y (H(y) \rightarrow \neg L(c, y))$	(5)UI	(13) $\forall x (\neg G(x) \vee \neg H(x))$	(12)蕴涵等值式
(7) $\forall y (H(y) \rightarrow \neg L(c, y))$	(3), (6)假言推理	(14) $\forall x (\neg (G(x) \wedge H(x)))$	(13)德·摩根律
		(15) $\neg \exists x (G(x) \wedge H(x))$	(14)量词否定等值式



## 课堂练习

(1) 用构造证明法证明下面的推理:

前提:  $\forall x (F(x) \rightarrow (G(y) \wedge H(x))), \exists x F(x);$

结论:  $\exists x (F(x) \wedge H(x)).$

(2) 每个喜欢玩英雄联盟的人都不喜欢玩王者荣耀. 每个人都喜欢玩王者荣耀或者DOTA. 有的人不喜欢玩DOTA. 因而有的人不喜欢玩英雄联盟. 设个体域为人类集合, 证明上述推理是正确的.

# 课堂练习

用构造证明法证明下面的推理:

前提:  $\forall x (F(x) \rightarrow (G(y) \wedge H(x))), \exists x F(x)$ ;

结论:  $\exists x (F(x) \wedge H(x))$ .

- |       |   |              |
|-------|---|--------------|
| 解 (1) | $\exists x F(x)$                                  | 前提引入         |
| (2)   | $F(a)$  | (1)EI        |
| (3)   | $\forall x (F(x) \rightarrow (G(y) \wedge H(x)))$ | 前提引入         |
| (4)   | $F(a) \rightarrow (G(y) \wedge H(a))$             | (3)UI        |
| (5)   | $G(y) \wedge H(a)$                                | (2), (4)假言推理 |
| (6)   | $H(a)$  | (5)化简        |
| (7)   | $F(a) \wedge H(a)$                                | (2), (6)合取引入 |
| (8)   | $\exists x (F(x) \wedge H(x))$                    | (7)EG        |



# 课堂练习

(2) 每个喜欢玩英雄联盟的人都不喜欢玩王者荣耀. 每个人都喜欢玩王者荣耀或者DOTA. 有的人不喜欢玩DOTA. 因而有的人不喜欢玩英雄联盟. 设个体域为人类集合, 证明上述推理是正确的.

解 设 $F(x)$ :  $x$ 喜欢玩英雄联盟,  $G(x)$ :  $x$ 喜欢玩王者荣耀,  $H(x)$ :  $x$ 喜欢玩DOTA.

前提:  $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x)), \forall x(G(x) \vee H(x)), \exists x\neg H(x)$ .

结论:  $\exists x\neg F(x)$ .

证明:

(1) $\exists x\neg H(x)$	前提引入	(6) $\forall x(G(x) \vee H(x))$	前提引入
(2) $\neg H(c)$	(1)EI	(7) $G(c) \vee H(c)$	(6)UI
(3) $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$	前提引入	(8) $G(c)$	(2), (7)析取三段论
(4) $\forall x(\neg F(x) \vee \neg G(x))$	(3)蕴涵等值式	(9) $\neg F(c)$	(8), (5)析取三段论
(5) $\neg F(c) \vee \neg G(c)$	(4)UI	(10) $\exists x\neg F(x)$	(9)EG



## 本章小结

- 在命题函数中, 命题变项的论述范围称作**个体域**.
- 用来刻划一个个体的性质或多个个体之间关系的词称为**谓词**.
- 表示有具体确定意义的性质或关系的谓词, 称为**谓词常项**, 否则称为**谓词变项**.
- **量词**可看作是对个体词所附加约束的词.
- 对谓词公式的约束变项进行换名时, 该变项在量词及其辖域中的所有出现均须同时更改, 公式的其余部分不变. 换名时一定要更改为该量词辖域中没有出现过的符号.



## 本章小结

- 前束范式把量词均放在公式的开头，它们的作用域延伸到整个公式的末尾.
- 在一阶逻辑中任何公式的前束范式都是存在的.
- 在进行构造性证明时，需要善于将语句符号化，熟悉谓词公式的蕴涵与等价式，并且灵活使用4条推理规则.



# 作业

P53:

1 (4) (7)

2 (4) (8)

3 (3)

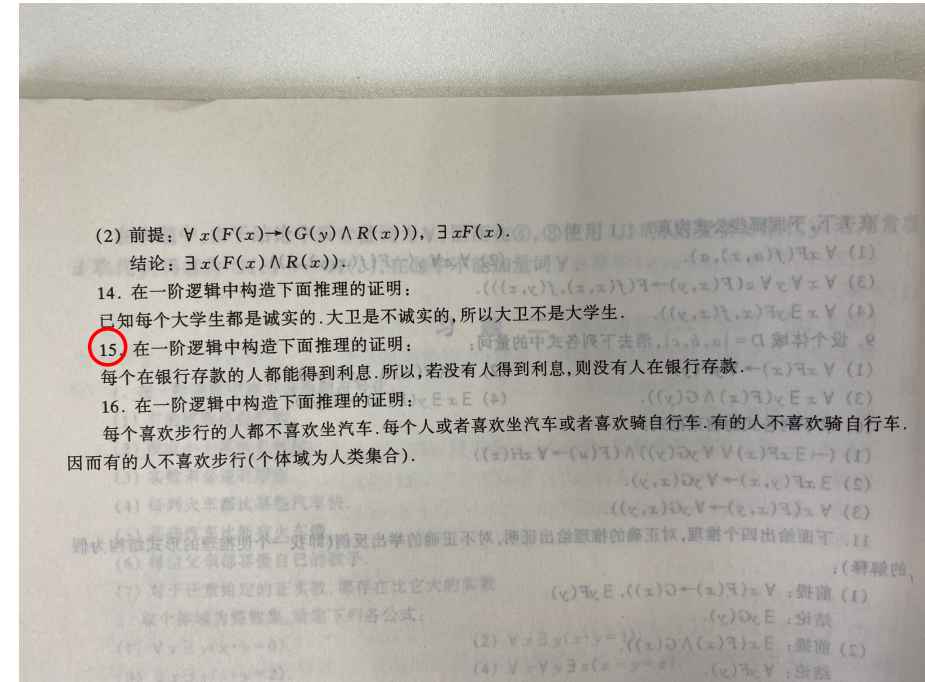
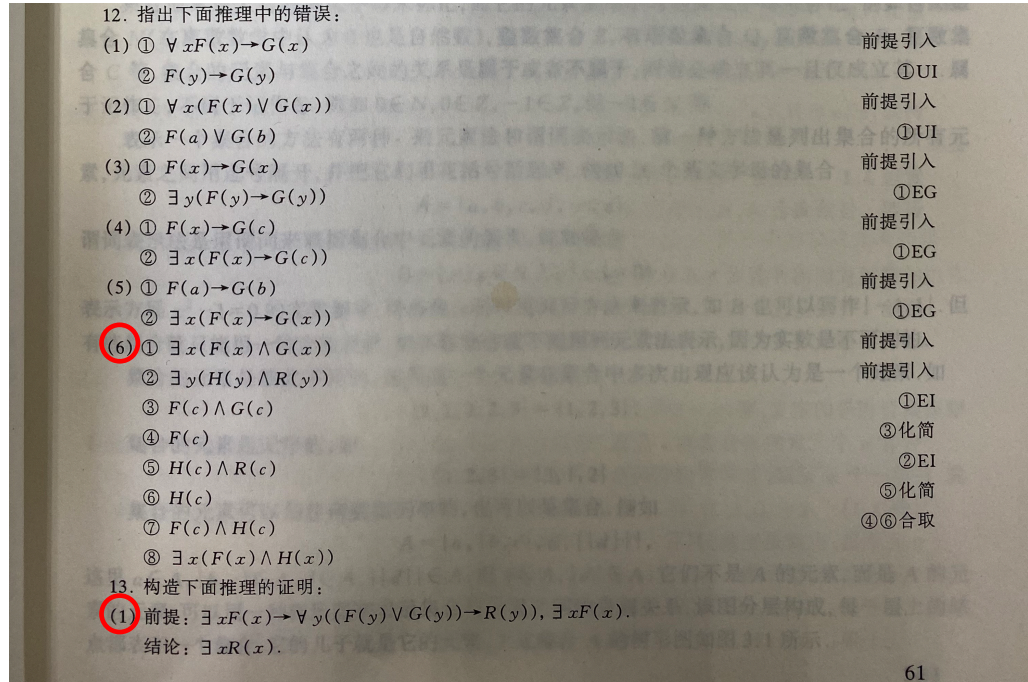
6 (3)

9 (2) (4)

10 (4)

12 (3)

13 (1) (2)



# 谢谢

有问题欢迎随时跟我讨论

